Metoda równań różniczkowych analizie stanów nieustalonych

Podstawowe pojęcia stanów nieustalonych

stan ustalony - postać odpowiedzi identyczna z postacią wymuszenia

stan nieustalony - przebiegi czasowe odpowiedzi mają inny charakter niż wymuszenie, powstaje jako nałożenie się stanu przejściowego (zwykle zanikającego) i stanu ustalonego przy zmianie stanu obwodu spowodowanego przełączeniem

komutacja - dowolna zmiana w obwodzie

t_0^- chwila czasowa poprzedzająca komutację

t_0^+ chwila czasowa następująca po komutacji

Prawa komutacji

Prawo komutacji dotyczące kondensatorów

$$\sum_i q_i(0^-) = \sum_i q_i(0^+)$$

$$u_C(0^-) = u_C(0^+)$$

Prawo komutacji dotyczące cewek

$$\sum_i \Psi_i(0^-) = \sum_i \Psi_i(0^+)$$

$$i_L(0^-) = i_L(0^+)$$

Wyznaczenie warunków początkowych

Wyznaczenie warunków początkowych:

- rozwiązania stanu ustalonego obwodu przed przełączeniem
- określenia jego postaci czasowej dla prądu cewki i napięcia kondensatora
- wyznaczenia wartości tego rozwiązania odpowiadającego chwili czasowej przełączenia

Opis obwodu elektrycznego za pomocą równań stanu

Liniowe obwody elektryczne RLC w stanach nieustalonych mogą być opisane przez równania różniczkowe o postaci

$$
\begin{array}{lllllll}
\dfrac{dx_1}{dt} = & a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \ldots + & a_{1n}x_n + & f_1(t) \\
\dfrac{dx_2}{dt} = & a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \ldots + & a_{2n}x_n + & f_2(t) \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\dfrac{dx_n}{dt} = & a_{n1}x_1 + & a_{n2}x_2 + & \ldots + & a_{nn}x_n + & f_n(t)
\end{array}
$$

Zmienne x występujące w równaniach oznaczają prądy cewek lub napięcia kondensatorów (tzw. **zmienne stanu**).

Równanie stanu w postaci macierzowej

Równanie macierzowe stanu dla obwodu liniowego

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

A - macierz stanu, **B** macierz współczynników uzależniające pochodną **x** od wektora wymuszeń **u**.

Równanie odpowiedzi y(t)

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

Macierze **C** i **D** uzależniają odpowiedź obwodu od wektorów zmiennych stanu **x** i wymuszeń **u**.

Rozwiązanie równań różniczkowych metodą klasyczną

W przypadku, gdy interesuje nas tylko jedna wybrana zmienna stanu układ równań stanu pierwszego rzędu można sprowadzić do jednego równania różniczkowego n-tego rzędu względem tej zmiennej

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} x}{dt^{n-2}} + \ldots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t)$$

Rozwiązanie powyższego równania różniczkowego można przedstawić w postaci sumy dwu składowych: ustalonej - wymuszonej przez źródło oraz składowej przejściowej - pochodzącą od niezerowych warunków początkowych dla tej składowej, oznaczanych jako

$$x_u(t), \quad x_p(t)$$

Składowa przejściowa

Równanie składowej przejściowej otrzymuje się zakładając wymuszenie $f(t)$ równe zeru. Otrzymuje się wówczas równanie różniczkowe jednorodne o postaci

$$a_n \frac{d^n x_p}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x_p}{dt^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} x_p}{dt^{n-2}} + \ldots + a_1 \frac{dx_p}{dt} + a_0 x_p = 0$$

rozwiązywane z pomocą równania charakterystycznego

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0$$

Pierwiastki s_i (i=1, 2, ..., n) tego wielomianu stanowią **bieguny układu.**

Rozwiązanie całkowite

Rozwiązanie stanu przejściowego dla biegunów pojedynczych

$$x_p(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i e^{s_i t}$$

A_i - stałe całkowania, które należy wyznaczyć wykorzystując znajomość warunków początkowych w obwodzie.

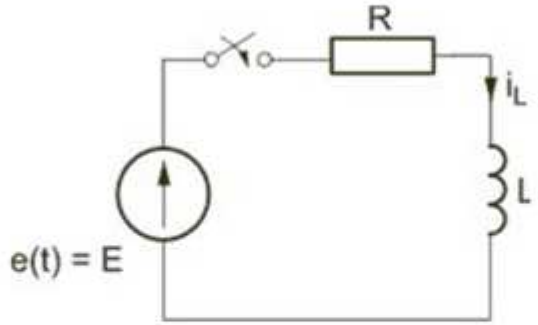
Po wyznaczeniu rozwiązania obwodu dla składowej ustalonej i przejściowej rozwiązanie całkowite jest sumą obu rozwiązań cząstkowych, to znaczy

$$x(t) = x_u(t) + x_p(t)$$

Powyższa procedura nosi nazwę **metody klasycznej**. Przy większej liczbie zmiennych jest bardzo pracochłonna i stosuje się zwykle do równań pierwszego rzędu.

Stan nieustalony w szeregowym obwodzie RL przy załączeniu napięcia stałego

Rozpatrzmy stan nieustalony w obwodzie szeregowym RL przy zerowych warunkach początkowych i załączeniu napięcia stałego



Prąd ustalony cewki jest równy

$$i_{Lu}(t) = \frac{E}{R}$$

Rozwiązanie stanu nieustalonego obw. RL

Równanie dla składowej przejściowej (źródło napięcia wymuszającego zwarte)

$$L\frac{di_{Lp}}{dt} + Ri_{Lp} = 0$$

Równanie charakterystyczne

$$Ls + R = 0$$

Rozwiązanie stanu przejściowego

$$s_1 = -\frac{R}{L}, \qquad i_{Lp} = A_1 e^{-\frac{t}{L/R}}$$

Prąd całkowity cewki w postaci ogólnej

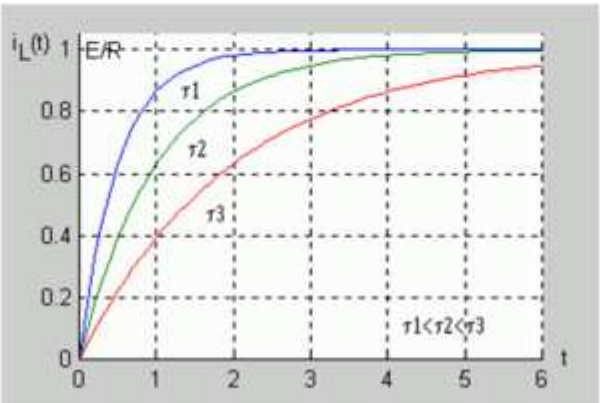
$$i_L(t) = i_{Lu}(t) + i_{Lp}(t) = \frac{E}{R} + A_1 e^{-\frac{t}{L/R}}$$

Rozwiązanie stanu nieustalonego obw. RL

Z prawa komutacji $i_L(0^-) = i_L(0^+) = 0 = \frac{E}{R} + A_1$

Stąd $A_1 = -E/R$

Prąd cewki $i_L(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{L/R}}\right)$



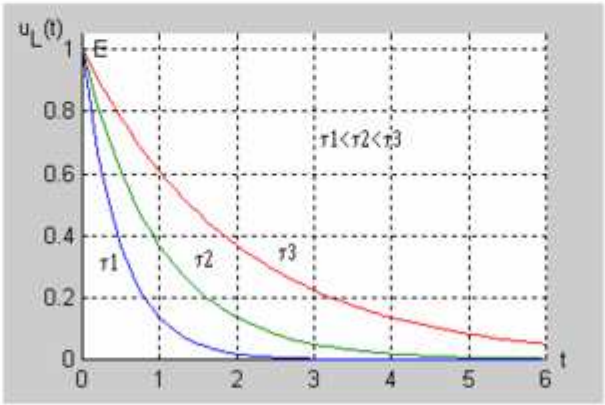
$\tau = \frac{L}{R}$ Stała czasowa

Przykładowe przebiegi prądu cewki w stanie nieustalonym przy różnych stałych czasowych

Napięcia na cewce w stanie nieustalonym w obw. RL

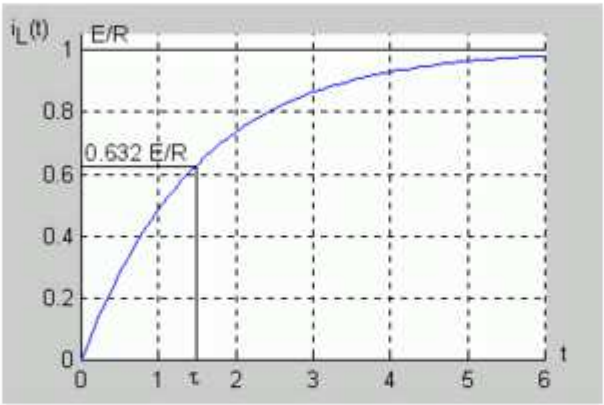
Napięcie na cewce w stanie nieustalonym

$$u_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} = Ee^{-\frac{t}{L/R}}$$



Przykładowe przebiegi napięcia na cewce w stanie nieustalonym dla różnych stałych czasowych

Wyznaczanie stałej czasowej

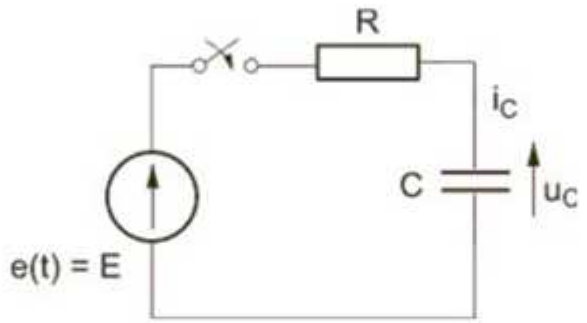


Ilustracja sposobu wyznaczania stałej czasowej obwodu na podstawie zarejestrowanego przebiegu w stanie nieustalonym

$$i_L(\tau) = \frac{E}{R}(1 - e^{-1}) = 0,632\frac{E}{R}$$

Stan nieustalony w gałęzi szeregowej RC przy załączeniu napięcia stałego

Rozpatrzymy stan nieustalony w obwodzie szeregowym RC przy zerowych warunkach początkowych i załączeniu napięcia stałego



Napięcie ustalone kondensatora jest równe

$$u_{Cu}(t) = E$$

Rozwiązanie stanu nieustalonego obw. RC

Po zwarciu źródła zasilającego otrzymuje się równanie różniczkowe jednorodne dla składowej przejściowej

$$RC\frac{du_{Cp}}{dt}+u_{Cp}=0$$

Równanie charakterystyczne

$$RCs+1=0$$

Rozwiązanie stanu przejściowego

$$s_1=-1/(RC), \qquad u_{Cp}=A_1e^{s_1t}=A_1e^{-\frac{t}{RC}}$$

Napięcie całkowite kondensatora w postaci ogólnej

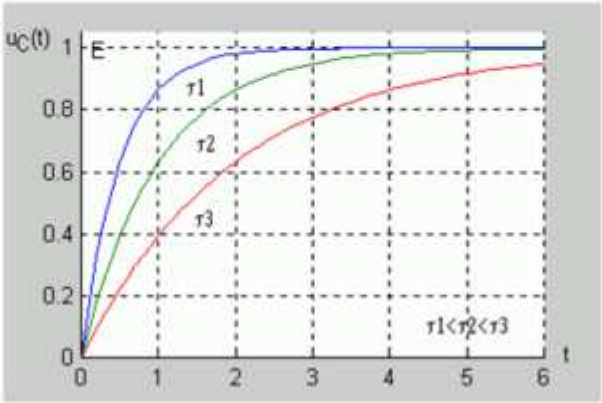
$$u_C(t)=u_{Cu}(t)+u_{Cp}(t)=E+A_1e^{-\frac{t}{RC}}$$

Rozwiązanie stanu nieustalonego obw. RC

Z prawa komutacji $u_C(0^-) = u_C(0^+) = 0 = E + A_1$

Stąd $A_1 = -E$

Końcowe rozwiązanie $u_C(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$



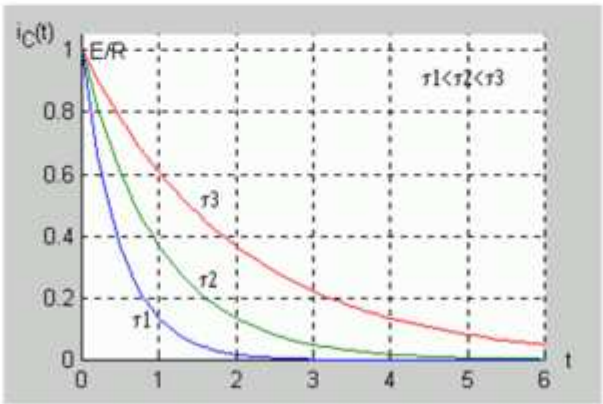
$\tau = RC$ Stała czasowa

Przebiegi napięcia na kondensatorze w stanie nieustalonym dla różnych stałych czasowych

Prądu kondensatora w stanie nieustalonym w obw. RC

Prąd kondensatora w stanie nieustalonym

$$i_C(t) = C\frac{du_c(t)}{dt} = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$



Przykładowe przebiegi prądu kondensatora w stanie nieustalonym